לוגיקה (1) פתרון תרגיל 11

1. (i) יהי $\mathfrak{A}$ מודל לאקסיומות (א)-(ו), נגדיר באינדוקציה פונקציה $H : \mathbb{N} \to |\mathfrak{A}|$ - $H(0) = 0^{\mathfrak{A}}$ ו-$H(n+1) = S^{\mathfrak{A}}(H(n))$. זו פונקציה חח"ע בגלל אקסיומות (א) ו-(ב). כדי לראות שזהו שיכון נשתמש באינדוקציה על המספרים הטבעיים. למשל נוכיח: לכל $n, m \in \mathbb{N}$ מתקיים $n \cdot m = *^{\mathfrak{A}}(H(n).H(m))$. נוכיח זאת באינדוקציה על m: עבור $m = 0$
$0 = n \cdot m = *^{\mathfrak{A}}(H(n), H(0)) = *^{\mathfrak{A}}(H(n), 0^{\mathfrak{A}}) = 0^{\mathfrak{A}} = 0$ כאשר השוויון הליפני אחרון נובע מאקסיומה (ה). עבור $m = m' + 1 > 0$
$n \cdot m = n \cdot (m' + 1) = n \cdot m + n = +^{\mathfrak{A}}(*^{\mathfrak{A}}(H(n), H(m)), H(n)) = *^{\mathfrak{A}}(H(n), S^{\mathfrak{A}}(H(m))) = *^{\mathfrak{A}}(H(n), H(m+1))$
כאשר השוויון השלישי נובע מהנחת האינדוקציה ומהטענה לגבי החיבור, והשיויון הרביעי נובע מהאקסיומה (ו).
ההוכחות לגבי הפונקציות S ו-$+$ דומות. יחידות השיכון נובעת מיידית מהיחידות שלו כשיכון בשפה $\{0, S\}$ אותה הוכחתם בכיתה. (ראו גם בחוברת הקורס).
(ii) התבוננו במבנה $\mathfrak{A}$ המוגדר בפתרון תרגיל 11 שאלה 1 סעיף ב. זהו מודל לאקסיומות אבל a אינו בטווח של השיכון H מהסעיף הקודם (הוכחה באינדוקציה על הטבעיים). מכיוון ש-H שיכון יחיד לא קיים איזומורפיזם בין $\mathfrak{A}$ ל-$\mathbb{N}$ ולכן האקסיומות אינן קטגוריות.

2. (i) יהי $f \in L$ סימן יחס n-מקומי. יהיו $b_1, ..., b_n \in range(H)$ כלומר קיימים $a_1, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$ כך ש-$H(a_i) = b_i$ לכל $i \leq n$. אזי לפי הגדרת שיכון:
$f^{\mathfrak{B}}(b_1, ..., b_n) = H(f^{\mathfrak{A}}(a_1, ..., a_n)) \in range(H)$ כנדרש.
(ii) לפי הנתון והגדרת האמת קיימת השמה: $s = \binom{y_1, \dots, y_m}{a'_1, \dots, a'_m}$ כך שמתקיים:
$$val(\mathfrak{A}, \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ a_1, \dots, a_n \end{pmatrix} s, \psi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)) = T.$$
לכן לפי תכונת השיכון אם נגדיר $s' = \binom{y_1, \dots, y_m}{H(a'_1), \dots, H(a'_m)}$ נקבל
$val(\mathfrak{B}, \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ H(a_1), \dots, H(a_n) \end{pmatrix} s', \psi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)) = T$ ולכן מהגדרת האמת של הכמת $\exists$ נקבל-
$val(\mathfrak{B}, \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_n \\ H(a_1), \dots, H(a_n) \end{pmatrix}, \varphi(x_1, ..., x_n)) = T$ כנדרש.
(iii) תהי $L = \{+, *\}$ ו-$L' = L \cup \{|\}$ כאשר $|$ סימן יחס דו מקומי. יהיו $\mathbb{N}$ ו-$\mathbb{Q}$ המבנים של הטבעיים והרציונליים עם הפירוש המקובל ל-L. נגדיר את $|^{\mathbb{N}}$ להיות היחס "מחלק את", ואת $|^{\mathbb{Q}}$ להיות היחס "קטן מ-".

3. (i) יהיו $\mathfrak{A}$ ו-$\mathfrak{B}$ שני מודלים לאקסיומות. בגלל האקסיומה (א) שניהם בעלי עולם בן שלושה איברים בדיוק. בה"כ נסמן $|\mathfrak{A}| = \{a_1, a_2, a_3\}$ ו-$|\mathfrak{B}| = \{b_1, b_2, b_3\}$. בכ"כ ניתן להניח כי $0^{\mathfrak{A}} = a_1$ $0^{\mathfrak{B}} = b_1$ $1^{\mathfrak{A}} = a_2$ ו-$1^{\mathfrak{B}} = b_2$ נגדיר פונקציה: $H : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ ע"י $H(a_i) = b_i$ לכל $i \leq 3$. כעת שימו לב כי האקסיומות (ג)-(כ) קובעות את הטבלאות של הפעולות $*, +$. לכן נקבל את הנדרש. לדוגמא נראה: $a_1 *^{\mathfrak{A}} a_3 = b_1 *^{\mathfrak{B}} b_3$ זה נובע ישירות מאקסיומות (ד) ו-(ה) ומכך שהגדרנו $0^{\mathfrak{A}} = a_1$ $0^{\mathfrak{B}} = b_1$. שאר המקרים מוכחים באופן דומה.
(ii) ההיגיון של הסעיף הקודם מראה כי התשובה שלילית.
(iii) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.